

Analisi di alcune problematiche connesse con la valutazione numerica della resistenza a fatica

B. Atzori, P. Lazzarin

Memorie

Come ben noto la resistenza a fatica di strutture e componenti meccanici dipende dalla variazione nel tempo dello stato locale di tensione nella zona potenzialmente critica. La presenza di perturbazioni geometriche sul componente comporta la nascita di concentrazioni di tensione capaci di innalzare localmente lo stato tensionale anche in maniera notevole.

Parole chiave: fatica, meccanica delle fratture, caratterizzazione materiali, prove meccaniche

INTRODUZIONE

Metodi classici della Costruzione di Macchine insegnano a stimare la resistenza a fatica in presenza di questi effetti quando sia noto il coefficiente K_t di concentrazione delle tensioni calcolato in campo elastico [1]. Oggi però, sempre più spesso, specie per componenti complessi, viene direttamente determinato l'intero stato tensionale in campo elastico mediante analisi agli elementi finiti, per cui sarebbe una inutile complicazione dover calcolare il K_t . Inoltre non sempre tale coefficiente può essere definito (è infatti necessario individuare una opportuna tensione nominale, cosa non sempre possibile per componenti di forma complessa) o può essere determinato (il picco di tensione calcolato in campo elastico tende infatti ad infinito al tendere a zero del raggio di fondo intaglio). Metodi alternativi sono stati proposti pertanto per stimare la resistenza a fatica utilizzando lo stato di tensione locale in campo elastico valutato mediante procedimenti numerici [2,3,4,5]. Malgrado lo sviluppo a cui sono giunti oggi i codici di calcolo agli elementi finiti con cui questa valutazione può essere effettuata, il collegamento tra lo stato di tensione locale calcolato e la resistenza a fatica del componente presenta diverse problematiche non ancora completamente chiarite che questa nota cercherà di evidenziare ed analizzare.

Per ragioni di spazio ci si limiterà a considerare il caso di stati piani di tensione o di deformazione, in presenza di tensioni nominali applicate semplici (monoassiali) e con variazione nel tempo ad ampiezza costante, in condizioni ambientali standard, pur sapendo che nella realtà l'ingegnere strutturista dovrà confrontarsi con situazioni ben più complesse.

TIPOLOGIE DI INTAGLI

La concentrazione di sforzi viene spesso indicata anche come effetto di intaglio, chiamando intaglio la perturbazione geometrica che la causa. Le tipologie di intaglio a cui ancora oggi si fa comunemente riferimento in letteratura sono semplicemente gli intagli dolci e gli intagli acuti. In realtà esi-

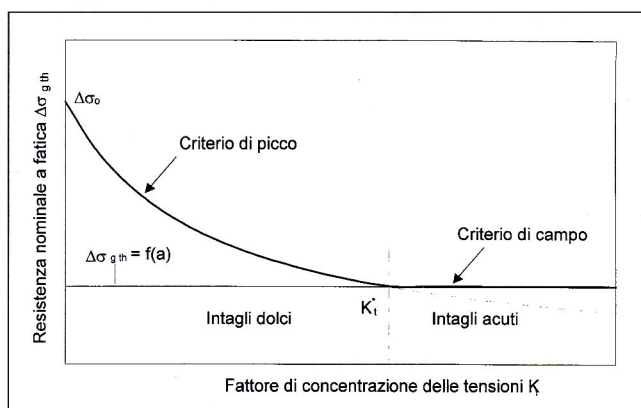


Figura 1: Rappresentazione schematica della variazione del limite di fatica di un materiale (in termini di tensione nominale) al crescere del coefficiente di concentrazione delle tensioni, per intagli di profondità costante.

Figure 1: The fatigue limit of a material (given in terms of nominal stress) plotted versus the stress concentration factor of notches with a constant dept.

stano anche altri concentratori di tensione, che in genere non vengono classificati come intagli, pur avendo cause ed effetti del tutto simili, relativi al caso di raggio di fondo intaglio nullo (il loro studio ha dato origine alla "meccanica della frattura" e, più recentemente, alla "meccanica dell'intaglio"). La figura 1 [5] evidenzia in maniera schematica ma chiara il criterio oggi comunemente utilizzato per classificare gli intagli come dolci o acuti: con riferimento ad un intaglio di profondità a , il limite di fatica in termini di range di tensione nominale lorda $\Delta\sigma_{gth}$, si riduce rispetto al limite di fatica $\Delta\sigma_0$ del provino liscio, in proporzione al coefficiente di concentrazione K_t per gli intagli dolci, mentre non varia al crescere di K_t per gli intagli acuti. Schematicamente la transizione da intaglio dolce e intaglio acuto si ha in corrispondenza del valore ottenuto come intersezione della curva $\Delta\sigma_{gth} = \Delta\sigma_0/K_t$ (determinata con i criteri della meccanica classica) con l'orizzontale $\Delta\sigma_{gth} = \Delta K_{th} / \sqrt{\pi a}$ (determinata con il criteri della meccanica della frattura in relazione al valore di soglia ΔK_{th} del fattore di intensificazione delle tensioni).

Nel caso di utilizzo degli elementi finiti, si ritiene più utile una rappresentazione come quella riportata in figura 2, che evidenzia come, nel caso di intagli acuti, anche valori molto elevati di tensione locale forniti dal calcolo risultino compatibili con una corretta stima della resistenza a fatica

B. Atzori

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Padova

P. Lazzarin

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali, Università di Padova

10/2001

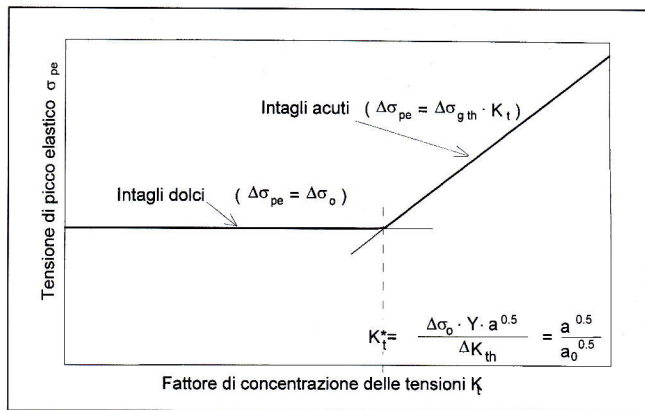


Figura 2: Rappresentazione schematica della variazione del limite di fatica di un materiale (in termini di tensione di picco calcolata in corrispondenza all'apice dell'intaglio nell'ipotesi di elasticità lineare) al crescere del coefficiente di concentrazione delle tensioni, per intagli di profondità costante (il valore indicato con K_t^* si riferisce al caso di angolo di apertura nullo, con il significato dei simboli illustrato in seguito).

Figure 2: Variations of the material fatigue limit (in terms of peak stress at the notch tip under purely elastic conditions) as a function of the stress concentration factor, the notches being characterised by the same depth a (K_t^* refers to a notch with an opening angle equal to zero; for the symbol meaning, see later).

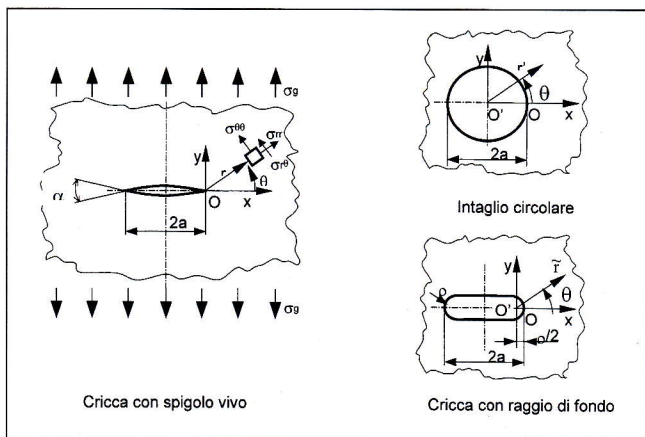


Figura 3: Simbologia e coordinate per i diversi casi esaminati.

Figure 3: Symbols and coordinate systems used in the different cases.

e come pertanto, in questi casi, diventi molto laboriosa e del tutto inutile una accurata determinazione della tensione di picco elastico $\Delta\sigma_{pe}$. In entrambe le figure sono evidenziati i normali criteri di progettazione della meccanica classica e della meccanica della frattura. La figura 2 evidenzia anche come il valore di K_t^* , che separa i campi di applicazione dei due criteri, dipende, oltre che dal materiale, anche dalla geometria dell'intaglio (in particolare dalla sua profondità). Per evitare di considerare come differenti problemi che in realtà sono invece molto simili, si utilizzerà nel seguito una classificazione degli intagli che considera:

- a) il numero di potenziali punti critici a fatica che l'intaglio introduce. Si chiameranno "semplici" gli intagli che introducono un solo punto di criticità e complessi gli intagli che ne introducono più d'uno (la cava di un anello Seeger, ad esempio, sarà un intaglio complesso in quanto introduce due punti di potenziale criticità);
- b) l'orientamento dell'asse dell'intaglio in relazione alla direzione della tensione nominale applicata. Questo elemento di classificazione, fondamentale in meccanica della frattura, in quanto distingue i diversi modi di propagazione della cricca, è normalmente trascurato quando si

parla di intagli nel senso classico del termine;

- c) la forma dell'intaglio. A questo proposito è consuetudine usare come parametro di classificazione la presenza o meno di un raggio di fondo intaglio (facendosi riferimento in genere alla meccanica classica per raggio diverso da zero ed alla meccanica della frattura, o dell'intaglio, per raggio nullo). E' già stato dimostrato come questa divisione sia artificiosa e fuorviante [4], giacché per piccoli raggi di raccordo il cedimento è controllato dagli stessi parametri di campo definiti per raggio di fondo intaglio nullo. Si ritiene più opportuno pertanto utilizzare altre due grandezze molto più adatte a classificare il campo locale di tensione nella zona critica e precisamente:

- c1) l'acutezza $\zeta = a/\rho$ dell'intaglio, definita come il rapporto tra la profondità a dell'intaglio ed il raggio di fondo intaglio ρ (figura 3);
- c2) l'apertura α dell'intaglio, definita come l'angolo formato dai due rami dell'intaglio che eventualmente lo completano, raccordandosi con l'arco di fondo intaglio di raggio ρ (figura 3);
- d) la posizione dell'intaglio, in particolare se sul bordo o al centro dell'elemento considerato (figura 3), usualmente introdotta in meccanica della frattura utilizzando un coefficiente di forma Y .

La presente nota si limiterà ad esaminare il caso di intagli semplici e disposti ortogonalmente al flusso della tensione nominale, prendendo invece in esame i diversi casi possibili di forma e di posizionamento dell'intaglio.

CAMPI DI TENSIONE PER DIVERSE TIPOLOGIE D'INTAGLIO

I campi di tensione presenti in prossimità di un intaglio sono già noti da tempo e sono stati recentemente richiamati da Taylor (almeno in parte) per una analisi dell'effetto di intaglio in cui evidenzia le similitudini tra intagli, nel senso classico del termine, e cricche, verificando la possibilità di stimarne il limite di fatica con procedimenti validi per entrambi i casi [7]. Per non appesantire troppo la trattazione, le espressioni analitiche dei campi di tensione relativi alle diverse geometrie analizzate in questo lavoro sono riportate in Appendice, con i necessari riferimenti agli Autori che le hanno sviluppate.

Modelli	Tipo intaglio	Raggio di fondo intaglio ρ	Profondità intaglio a mm	Larghezza netta della piastra mm
1	semicircolare	10	10	800
2	U	0	10	800
3	U	0.5	10	800
4	U	1.25	10	800
5	U	2.5	10	800
6	V135°	0	10	800
7	V135°	0.5	10	800
8	V135°	2.5	10	800

Tabella 1: Parametri geometrici dei modelli utilizzati.

Table 1: Geometrical parameters of the models.

Analisi numeriche effettuate su piastre semiinfinite con intagli laterali aventi le geometrie riportate in tabella 1 e sollecitate ad apertura con una tensione nominale σ_y hanno fornito, per le tensioni σ_{yy} nella direzione del carico, i risultati riportati in figura 4, in ottimo accordo con le espressioni riportate in Appendice.

Tali campi risultano in ogni caso schematizzabili come indi-

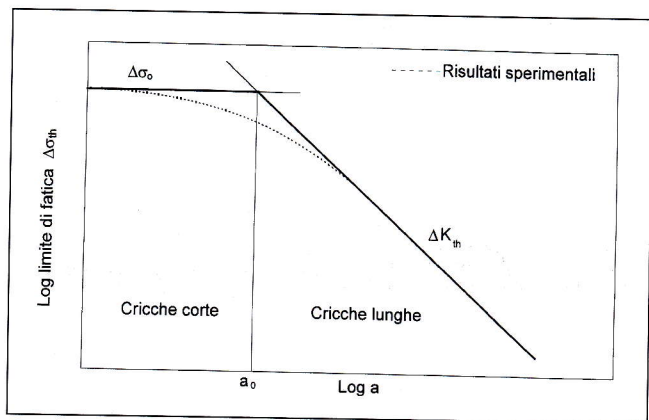


Figura 6: Rappresentazione schematica del comportamento a fatica di una materiale in presenza o meno di cricche.

Figure 6: The fatigue behaviour of a material in the presence and in the absence of cracks.

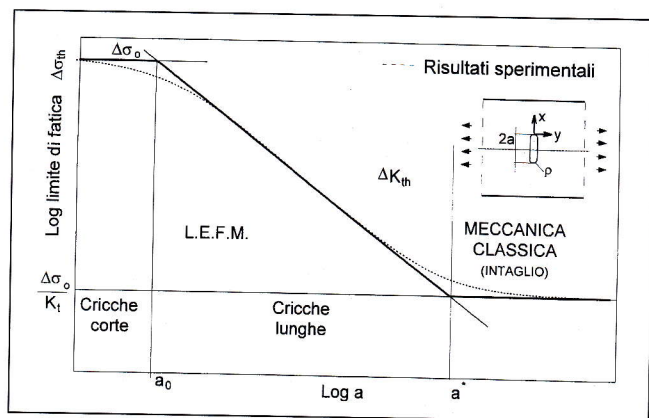


Figura 7: Rappresentazione schematica del comportamento a fatica di un materiale in presenza o meno di cricche ed intagli.

Figure 7: The fatigue behaviour of a material weakened by cracks or notches.

presentano i due criteri individua una cricca di lunghezza a_0 (spesso chiamata "cricca intrinseca" del materiale) che separa il campo di applicazione della meccanica classica da quello della meccanica della frattura, per il materiale considerato. Imponendo $\Delta\sigma_{gth} = \Delta\sigma_0$ è immediato ricavare il valore di

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2 \quad (3)$$

Il diagramma riportato in figura 6, che potrebbe sembrare equivalente a quello riportato in figura 1, in realtà ne differisce completamente in relazione alle applicazioni alla progettazione. Infatti il diagramma di figura 1 introduce in maniera corretta i limiti più vincolanti della meccanica della frattura nei criteri della meccanica classica, portando a previsioni sempre in vantaggio di sicurezza, per cui le correzioni proposte, ad esempio da Peterson [15], per giungere a stime più accurate del reale comportamento a fatica possono venire trascurate nella pratica applicativa. Al contrario, il diagramma di figura 6 non introduce in maniera corretta i limiti più vincolanti della meccanica classica nei criteri della meccanica della frattura, limitandosi ad imporre il non superamento di un massimo assoluto costituito dal comportamento del materiale liscio, e portando pertanto nella zona di transizione a previsioni sempre in svantaggio di sicurezza, e pertanto non accettabili dal progettista.

Poiché nell'intorno di a_0 (campo delle cricche corte) l'errore che si commette con le metodologie usuali può essere rile-

vante, sono stati proposti diversi approcci per poter prevedere il reale comportamento, da quello di Topper [14], puramente formale, a quello di Taylor [7], che in qualche misura consente di adottare un criterio omogeneo per la stima del superamento o meno del limite di fatica sia per le cricche che per gli intagli, come già fatto precedentemente da altri [16,17]. Chi ne avesse necessità potrà pertanto fare riferimento ad uno di questi approcci. In quanto si dirà nel seguito si farà riferimento invece ai criteri usuali di progettazione (sia classici che di meccanica della frattura), e pertanto alle criticità rappresentate con tratto continuo nella figura 6, raccomandando però, per evitare stime del limite di fatica con un errore superiore al 10%, di non considerare lunghezze di cricca comprese nella fascia $0,2 a_0 \leq a \leq 5a_0$. A questo proposito si noti come dalla espressione suggerita da Topper [14] risulti che per una cricca di lunghezza $a=a_0$ si abbia in ogni caso una riduzione del limite di fatica del materiale liscio pari a circa il 30%. In realtà nessuno ha ancora dimostrato che l'entità di tale decadimento non dipenda dal materiale considerato, nel qual caso la formula di Topper andrebbe opportunamente modificata.

Perché il diagramma di figura 6 sia rappresentativo delle effettive possibilità applicative, esso deve essere esteso al caso di cricche raccordate ed intagli, come indicato nella figura 7. Nel caso infatti di intaglio dolce, con sensibilità a fatica unitaria, deve risultare $\Delta\sigma_{pe} = K_t \cdot \Delta\sigma_g = \Delta\sigma_0$. Per un dato K_t , pertanto, il comportamento a fatica sarà schematicamente quello indicato a tratto continuo in figura 9: per a elevati prevarrà il criterio di picco; al diminuire di a , per a inferiori ad a^* , si passerà al criterio di campo, sino a giungere ad una trascurabile influenza non solo del picco ma anche del campo, per a inferiori di a_0 . Ovviamente, per $K_t = \infty$ (cricca), il valore di a^* diventerà pari ad infinito e non sarà mai possibile far ricorso ad un criterio di picco.

Semplici calcoli consentono di trovare che $a^*/a_0 = K_t^2$, risultando per a^* :

$$\frac{\Delta\sigma_0}{K_t} = \Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th}}{\sqrt{\pi a^*}} = \frac{\Delta\sigma_0 \sqrt{\pi a_0}}{\sqrt{\pi a^*}} \quad (4)$$

Nel caso inoltre di cricca raccordata, ricordando l'espressione di $K_t = 1 + 2\sqrt{a/\rho}$ data da Neuber, si trova facilmente che per $a \gg \rho$, ad a^* corrisponde un valore di $\rho^* = 4a_0$. È bene comunque evidenziare la netta differenza del comportamento reale rispetto a quello schematico nell'intorno di a^* (imputabile a "sensibilità all'intaglio" nel caso classico del termine) e nell'intorno di a_0 (imputabile invece semmai ad una "sensibilità ai difetti", ben diversa da quella all'intaglio). Entrambe le sensibilità dipendono dal materiale, essendo correlate tra loro, per cui la sola grandezza a_0 può essere sufficiente ad individuarle, ma esse hanno un significato fisico ben diverso, cosa non sempre ben chiara in letteratura.

Dal punto di vista dell'utilizzo degli elementi finiti il diagramma di figura 7 mostra chiaramente che il valore di picco ha significato solo per profondità di intaglio superiori ad a^* , dopo di che si deve passare ad un approccio di campo. Il trascurare correzioni dovute alla sensibilità all'intaglio è lecito in quanto l'errore che si commette è sempre in vantaggio di sicurezza. L'errore diventerebbe eccessivo se si continuasse ancora ad utilizzare il criterio di picco per valori di a minori di a^* o il criterio di campo per valori di a maggiori di a^* . Poiché dei difetti molto piccoli (ad esempio dovuti a diverse finiture superficiali) si tiene in genere conto in maniera diversa, e non con il loro inserimento nel modello di calcolo, si ritiene che la zona intorno ad a_0 abbia poco significato applicativo in questo contesto, se non nel ricordare che il trascurare tali difetti, o il considerarli come effettive cricche, porterebbe a previsioni in svantaggio di sicurezza. È pertanto necessario far ricorso a modelli del tipo precedentemente ricordato [7, 14] o, più semplicemente, far riferimen-

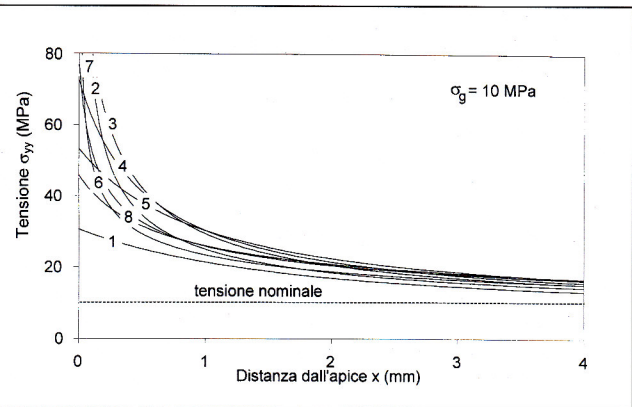


Figura 4: Campi di tensione plottati lungo la bisettrice dell'intaglio per le diverse geometrie indicate in Tabella 1.

Figure 4: Stress fields along the notch bisector for the models described in Table 1.

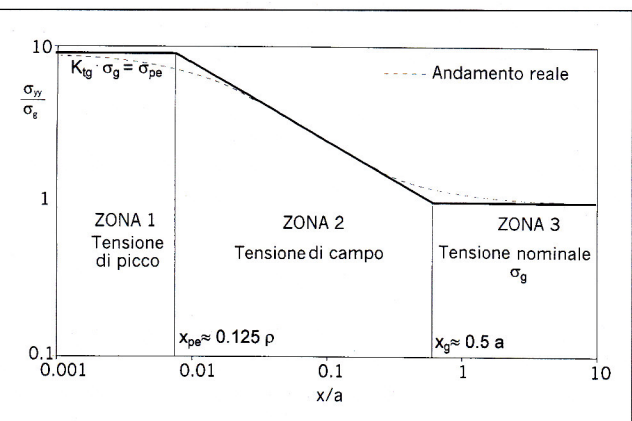


Figura 5: Rappresentazione schematica delle possibili zone di valutazione del campo di tensione locale (valori indicati di x_{pe} e x_g per angolo di apertura dell'intaglio nullo).

Figure 5: The peak stress zone, the stress field zone and the nominal stress zone (the values of x_{pe} and x_g refer to a central notch with an opening angle equal to zero).

ato in figura 5 e quindi potranno essere sempre suddivisi in zone:

- zona 1 (sino a x_{pe}): il valore effettivo del campo è prossimo al valore di picco elastico e quindi potrà essere utilizzato per stime della resistenza a fatica secondo la meccanica classica;
- zona 2 (da x_{pe} a x_g): il valore effettivo del campo è prossimo al tratto esponenziale (pendenza costante in un diagramma doppio logaritmico) e quindi potrà essere utilizzato per stime della resistenza a fatica secondo la meccanica della frattura o la meccanica dell'intaglio;
- zona 3 (oltre x_g): il valore effettivo del campo è prossimo al valore nominale e quindi potrà essere utilizzato (eventualmente estrapolando a distanza $x=0$) per stime della resistenza a fatica secondo le attuali normative strutturali (ad es. Eurocodice 3 o 9).

La zona 1 mancherà nel caso di intagli molto acuti (raggio di fondo intaglio nullo) mentre la zona 2 mancherà nel caso di intagli di acutezza uguale od inferiore all'unità ($a \leq \rho$).

L'infittimento della suddivisione da utilizzare per ottenere stime accurate delle zone precedentemente individuate dipenderà dalla estensione della zona stessa, oltre che dalla funzione di forma dell'elemento considerato. Si ritiene pertanto utile fornire dei valori indicativi per x_{pe} ed x_g in funzione della geometria.

Per ottenere una stima del valore di x_{pe} nel caso di angolo di

apertura α nullo può essere utilizzata l'espressione semplificata del campo proposta da Glinka [13] per intagli raccordati che, per distanze $x \geq \rho$ assume la forma molto semplice

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{pe}}{\sqrt{8}} \left(\frac{\rho}{x + 0,5\rho} \right)^{0,5} \quad (1)$$

Al crescere del termine x/ρ tale espressione tende asintoticamente ad un esponenziale puro (retta in un diagramma doppio logaritmico) la cui intersezione con il valore costante $\sigma_g = \sigma_{pe}$ si ha per una distanza $x_{pe} = 0,125 \rho$. Con gli elementi finiti, per avere una stima abbastanza accurata della tensione di picco elastico bisognerà ovviamente infittire molto di più la mesh, sino ad arrivare a distanze x dall'apice pari ad almeno 1/10 del raggio ρ , se ci si accontenta di una stima della σ_{pe} in difetto del 10%. Nel caso di intagli aperti saranno necessarie distanze ancora minori visto l'andamento più piatto del tratto inclinato. L'introduzione di un coefficiente di forma Y avrà invece effetto opposto.

Per ottenere una stima del valore di x_g nel caso di cricca e di raggio di fondo intaglio molto piccolo può essere utilizzata l'espressione classica della meccanica della frattura riportata in Appendice (A.6). Ponendo in tale espressione $\sigma_y = \sigma_g$ si ottiene $x_g = 0,5 a$.

Anche in questo caso per avere una stima abbastanza accurata del campo esponenziale bisognerà infittire molto di più la mesh, sino ad arrivare a distanze x dall'apice pari ad almeno 5/100 della profondità se ci si accontenta di un errore del 5%.

Per completare questa analisi si vuole evidenziare l'utilità della rappresentazione appena discussa per interpretare gli effetti di una variazione dei parametri geometrici o di carico. Con riferimento alla figura 5:

- a) una variazione di ρ agisce soprattutto sulla zona 1. Se ρ aumenta il K_t diminuisce e si amplia la zona 1. Se ρ diminuisce avviene il contrario, sino alla scomparsa della zona 1;
- b) una variazione dell'acutezza $\zeta = a/\rho$ agisce soprattutto sulla zona 2, la cui parte centrale a pendenza costante aumenta all'aumentare dell'acutezza o si riduce sino a scomparire per acutezza unitaria;
- c) una variazione della tensione nominale applicata σ_g comporta una traslazione verticale del campo di tensione, variando di conseguenza la criticità a fatica ma lasciando inalterata la disposizione delle diverse zone;
- d) una variazione in scala del componente analizzato comporta una traslazione orizzontale del campo di tensione. Se la scala aumenta, l'estensione della zona 1 aumenta, mentre l'entità delle tensioni presenti (e quindi la criticità) resta la stessa secondo i criteri della meccanica classica (σ_{pe}) o aumenta secondo i criteri della meccanica della frattura (K_t). A seconda della geometria dell'intaglio potrà pertanto variare in maniera netta l'effetto scala, a seconda che prevalga l'effetto della zona 1 o della zona 2. Il prevalere di una zona o dell'altra dipende, oltre che dalla geometria dell'intaglio, anche dalle caratteristiche del materiale con cui il componente è realizzato, come verrà precisato più avanti.

INFLUENZA DEL MATERIALE SUL LIMITE DI FATICA

In letteratura è già stato ampiamente evidenziato [14], in relazione al limite di fatica di componenti criccati, come le previsioni fornite dai criteri della meccanica della frattura

$$\Delta K_{th} = \Delta \sigma_{gth} \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

non possano portare ad un limite di fatica $\Delta \sigma_{gth}$ maggiore di quello $\Delta \sigma_0$ mostrato dal materiale in assenza di cricche, come evidenziato nella figura 6. La intersezione delle rette che rap-

BIBLIOGRAFIA

- [1] Atzori B., Appunti di Costruzione di Macchine. Ed. Cortina, Padova, 2000.
- [2] Frost N.E., Marsh K.J., Pook L.P., Metal Fatigue. Oxford University Press, Oxford, 1974.
- [3] Smith R.A., Miller K.J., Prediction of fatigue regimes in notched components. Int. J. Mech. Sci. 1978; 20:201-6.
- [4] Atzori B., Meccanica della frattura o effetto di intaglio nella progettazione a fatica, XIII Conv. AIAS, Bergamo, Sept. 1985.
- [5] Taylor D., O'Donnell M., Notch geometry effects in fatigue: a conservative design approach, Engineering Failure Analysis 1994; 1:275-87.
- [6] Lazzarin P., Tovo R., A Unified Approach to the Evaluation of Linear Elastic Stress Fields in the Neighborhood of Cracks and Notches. Int. J. Fracture: 1996; 78: 3-19.
- [7] Taylor D., Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. Int. J. Fatigue 1999; 21: 413-420
- [8] Airy G.B., Brit. Assoc. Advance Sci Rept., 1862
- [9] Irwin G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack trasversing a plate, Journal of Applied Mechanics, Sept. 1957.
- [10] Carpenter W.C., A collocation procedure for determining fracture mechanics parameters at a corner. Int. J. Fracture, 1984, 24, 255-266
- [11] Williams M.L., Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. Journal of Applied Mechanics 1952; 19:526-528.
- [12] Westergaard H.M., Bearing pressures and cracks, J. Appl. Mech. 1939; 61:49-53.
- [13] Glinka G., Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks. Engng Fracture Mechanics 1985; 22: 485-508
- [14] El Haddad M.H., Topper, T.H. and Smith K.N., Prediction of Non-Propagating Cracks. Engng. Fracture Mechanics 1979; 11: 573-584
- [15] Peterson R.E., Notch sensivity. In: Sines G, Waisman J.L., Editors. Metal Fatigue. New York: McGraw Hill, 1959; 293-306.
- [16] Atzori B., Lazzarin P., Tovo R., Evaluation of the fatigue strength of a deep drawing steel. Österreichische Ingenieur-und Architekten-Zeitschrift (ÖIAZ) 1992; 137: 556-561
- [17] Lazzarin P, Tovo R., Meneghetti G., Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity. Int. J. Fatigue 1997; 19: 647-65
- [18] Lazzarin P., R. Zambardi, P. Livieri, Plastic Notch Stress Intensity Factors for Large V-Shaped Notches under Mixed Load Condition. Int. J. Fracture 2001; 107 (4): 361-377.

A P P E N D I C E

**APPENDICE:
ESPRESSIONI ANALITICHE DEI CAMPI DI TENSIONE**

Nel caso di piastra infinita con foro circolare di raggio r e tensione nominale riferita alla sezione lorda σ_g , già Airy [8], con riferimento ad un sistema di coordinate polari r', θ avente origine nel centro del foro ed anomalia riferita all'asse ortogonale al carico, aveva trovato:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_g}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\rho}{r'}\right)^2 + \cos 2\theta \left[1 + 3 \left(\frac{\rho}{r'}\right)^4 \right] \right\} \\ \sigma_{r'r'} &= \frac{\sigma_g}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{r'}\right)^2 - \cos 2\theta \left[1 - 4 \left(\frac{\rho}{r'}\right)^2 + 3 \left(\frac{\rho}{r'}\right)^4 \right] \right\} \quad (A.1) \\ \sigma_{r'\theta} &= \frac{\sigma_g}{2} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\rho}{r'}\right)^2 - 3 \left(\frac{\rho}{r'}\right)^4 \right\} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Nel caso di cricca su piastra infinita, sollecitata ad apertura (modo I) con tensione nominale σ_g , Irwin [9], con riferimento ad un sistema di coordinate polari r, θ , avente origine nell'apice della cricca ed anomalia riferita al prolungamento dell'asse della cricca stessa, aveva trovato:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{r'r'} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{r'\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (A.2)$$

con $K_I = \sigma_g \sqrt{\pi a}$
Tali espressioni sono state poi estese anche al caso di intagli acuti aperti [6,10], introducendo esplicitamente il fattore di intensificazione K_I nelle distribuzioni asintotiche di Williams [11], definite a meno di una costante di proporzionalità:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left[(1+\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\theta + \chi_1 (1-\lambda_1) \cos(1+\lambda_1)\theta \right] \\ \sigma_{r'r'} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left[(3-\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\theta - \chi_1 (1-\lambda_1) \cos(1+\lambda_1)\theta \right] \\ \sigma_{r'\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left[(1-\lambda_1) \sin(1-\lambda_1)\theta + \chi_1 (1-\lambda_1) \sin(1+\lambda_1)\theta \right] \end{aligned} \quad (A.3)$$

con $K_I = Y_I \sqrt{\pi} \sigma_g a^\gamma$
essendo l'esponente $\gamma = 1 - \lambda_1$ funzione dell'angolo di apertura α . Sia per gli intagli acuti che per quelli raccordati considerati nel seguito, la Tabella A1 riporta il valore di tutti i parametri in gioco al variare dell'angolo di apertura α .

α [rad/ π]	r_0/ρ	Modo I		
		λ_1	χ_1	μ_1
0	0.500	0.500	1.000	-0.500
1/6	0.455	0.501	1.071	-0.424
1/4	0.429	0.505	1.166	-0.389
1/3	0.400	0.512	1.312	-0.354
1/2	0.333	0.544	1.841	-0.280
3/4	0.200	0.674	4.153	-0.150

Tabella A1: Esponenti e parametri per alcuni angoli di apertura dell'intaglio.

Infine le espressioni relative al caso di raggio di fondo intaglio nullo, con angolo α di apertura nullo o meno, sono state generalizzate in modo da essere applicabili anche nel caso di raggio di fondo intaglio ρ non nullo [6], facendo riferimento ad un sistema di coordinate polari \tilde{r}, θ con origine sull'asse dell'intaglio ad una distanza pari a r_0 dall'apice dell'intaglio verso il centro del raccordo (essendo r_0 funzione dell'angolo di apertura):

ESTENSIONE AL CASO DI VITA FINITA

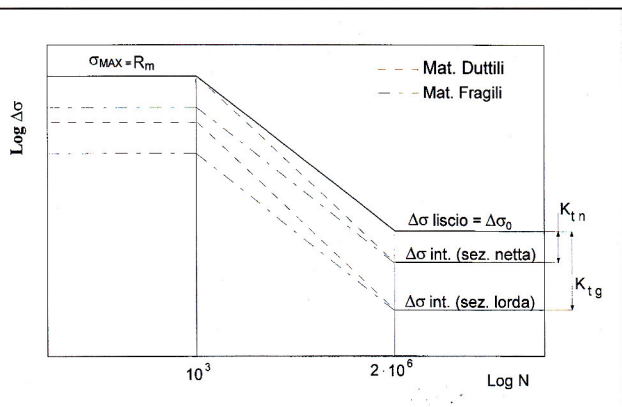


Figura 8: Andamento schematico delle curve di Wöhler per provini lisci e per provini intagliati.

Figure 8: Wöhler curves related to smooth and notched specimens.

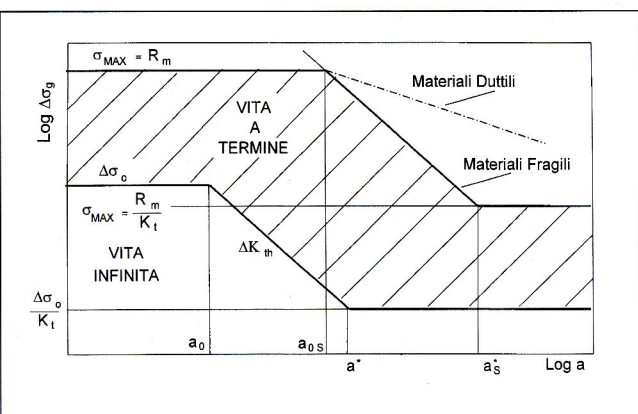


Figura 9: Rappresentazione schematica del comportamento statico e a fatica di un materiale in presenza di cricche ed intagli.

Figure 9: Static and fatigue behaviour of a material weakened by cracks and notches.

to alle caratteristiche di resistenza a fatica del materiale liscio ma con la stessa finitura superficiale. A questo riguardo si noti come il diagramma di figura 7 confermi che materiali con a_0 molto basso (come ad esempio gli acciai ad elevata resistenza per i quali a_0 è dell'ordine dei centesimi di millimetro) risultino molto sensibili a graffi e lavorazioni grossolane, risentendone con riduzioni circa del 50% del limite di fatica per profondità dei difetti pari ad appena alcuni centesimi di millimetro.

Il diagramma di figura 7 evidenzia anche in maniera molto chiara l'effetto scala (ovvero la variazione di resistenza a fatica conseguente alla variazione delle dimensioni assolute a parità di K_t) per cricche raccordate: ad una zona di relativa insensibilità alle dimensioni assolute (sino ad a_0) seguirà una zona di forte influenza delle dimensioni assolute tra a_0 e a^* (con decadimento della resistenza a fatica dato dal rapporto delle dimensioni elevato allo 0.5) e quindi una zona di insensibilità alle dimensioni assolute per valori di a maggiori di a^* .

Per concludere si ritiene utile evidenziare che il diagramma di figura 7 si modifica sostanzialmente nel caso di intagli con angolo α di apertura diverso dallo zero, in quanto, come ricordato in Appendice (A.7), nel legame tra $\Delta\sigma_{gth}$ ed λ l'esponente non è più lo 0.5 della cricca. In particolare, per il caso di angolo $\alpha=135^\circ$ (tipico di molte giunzioni saldate) si ha un esponente $\gamma=0.326$, con effetto scala diverso da quello precedentemente evidenziato per le cricche. Naturalmente varieranno in corrispondenza anche i valori di a_0 e di a^* .

Le considerazioni precedentemente esposte si riferiscono al limite di fatica. L'estensione al caso di vita a termine non è semplice, in quanto in letteratura, a conoscenza degli scriventi, non si trovano indicazioni a riguardo.

Nel caso della meccanica classica, in mancanza di dati di fatica specifici, si è soliti procedere come illustrato in figura 8, dove è evidenziata la profonda differenza applicativa di due coefficienti di concentrazione delle tensioni non sempre ben distinti in letteratura (e di conseguenza nemmeno nella pratica applicativa): il K_{tg} , riferito alla tensione nella sezione lorda, ed il K_{tn} , riferito alla tensione nella sezione netta. Solo con riferimento alla sezione netta si può infatti assumere che, per materiali duttili, la resistenza statica di un provino intagliato coincida con quella di un provino liscio (a causa della completa plasticizzazione della sezione ristretta). Alla luce di quanto adesso chiarito risulta evidente che il generico K_t usato sino a questo punto è in realtà un K_{tg} , collegando la tensione di picco elastico con la tensione nominale lorda di normale utilizzo nella meccanica della frattura.

Anche per il caso di vita a termine, però, il criterio di picco della meccanica classica riuscirà eccessivamente penalizzante nel caso di intagli acuti, il cui comportamento è dominato dal campo esponenziale delle tensioni. Schematicamente la situazione può essere rappresentata come indicato in figura 9, utilizzando un diagramma analogo a quello della figura 7.

Sulle stesse coordinate utilizzate per il diagramma di figura 7, oltre alla variazione del limite di fatica $\Delta\sigma_{gth}$ (corrispondente alla spezzata che delimita inferiormente la zona tratteggiata) è stata indicativamente tracciata una spezzata che delimita superiormente l'area tratteggiata, corrispondente alla resistenza statica, analizzabile ancora con la meccanica della frattura lineare elastica solo nel caso dei materiali fragili, per i quali è immediato il riconoscimento di una cricca intrinseca statica a_{0s} .

L'area tratteggiata corrisponde ad una zona di vita a termine che conterrà tutte le curve a vita finita (a vita cioè inferiore a quella corrispondente al ginocchio della curva di Wöhler in fatica classica).

Il comportamento reale per il caso statico di un materiale duttile sarà naturalmente molto più complesso di quello indicato, e non più rappresentabile con le semplici espressioni della meccanica della frattura lineare elastica, come recentemente evidenziato [18]. Si ritiene comunque che il diagramma tracciato sia sufficientemente rappresentativo, evidenziando:

- il diverso comportamento di materiali fragili e duttili;
- l'aumentare di a_0 e di a^* al ridursi della vita a fatica, sino ai valori massimi rappresentati dalla resistenza statica;
- la possibilità che l'effetto scala si riduca nel caso di basso numero di cicli per i materiali duttili a causa del prevalere del campo plastico, avente esponente molto più basso rispetto al campo elastico;
- la possibilità di calcolare la vita a fatica come semplice propagazione di cricca acuta per tutti i casi di raggio di fondo intaglio sufficientemente ridotto da far prevalere il criterio di campo rispetto a quello di picco.

Nel caso di utilizzo di elementi finiti un errore non trascurabile (ma in vantaggio di sicurezza) viene commesso per il calcolo a vita finita se, nel caso di materiale duttile, si confrontano i valori locali calcolati con il comportamento a fatica del materiale liscio, utilizzando quindi in definitiva la curva di resistenza indicata in figura 8 per i materiali fragili. Tale approccio, spesso utilizzato nel caso di vite elevate, sarebbe ovviamente troppo conservativo nel caso di fatica oligociclica o resistenza statica.

phenomenological point of view, substantially different. The result is shown in Figure 7.

In correspondence of the greatest values of a , K_t is thought of as the parameter that controls the fatigue limit, so that $\Delta\sigma_{peak} = K_t \cdot \Delta\sigma_g = \Delta\sigma_g$ (where $\Delta\sigma_g$ is the nominal stress referred to the gross area). By decreasing a , the peak stress criterion gives predictions which progressively become more and more conservative, due to the increasing influence of the notch sensitivity.

As soon as $a < a^*$, the peak stress criterion has to be substituted with the stress field criterion, in that the penalization given by K_t would become unrealistic. Finally, when $a < a_0$, both the peak and the field criterion are no longer applicable. As it is obvious, in the sharp crack case ($\rho = 0$), K_t and a^* both tend towards infinity, so that it is never possible to use a stress peak criterion for a cracked component. The proposed diagram degenerates in this case into the Kitagawa diagram, which appears to be a particular case of the more general diagram proposed here. Simple considerations allow to write:

$$a^* / a_0 = K_t^2 \tag{2}$$

since the following identity is valid in correspondence of a^* :

$$\frac{\Delta\sigma_0}{K_t} = \Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th}}{\sqrt{\pi a^*}} = \frac{\Delta\sigma_0 \sqrt{\pi a_0}}{\sqrt{\pi a^*}} \tag{3}$$

In the case of a blunt crack, by using for the theoretical stress concentration factor the expression $K_t = 1 + 2 \sqrt{a/\rho}$ (due to Inglis and Neuber), it is possible to demonstrate that in correspondence of a^* , when $a \gg \rho$, the notch root radius turns out to be $\rho^* = 4a_0$.

It is worth noting that the real behavior shown in Figure 7 differs from the continuous curve for two different reasons:

- in correspondence to the a^* value the difference is due to the "notch sensitivity", according to the usual meaning of the terms;
- in correspondence of the a_0 value the difference is, on the contrary, due to a "sensitivity to defects".

The two sensitivities depend on two different parameters, a_0 and a^* . Nevertheless, such parameters being correlated from each other, the only length parameter a_0 can be sufficient to estimate both the "sensitivity to defects" and the "notch sensitivity". However, the physical significance remains substantially different.

Figure 7 also confirms that materials characterized by very small a_0 values (for example, high strength steels) are very sensitive to finishing conditions, being strongly penalized in their fatigue limit in presence of defects smaller than a_0 . Since numerical analyses carried out on structural components usually neglect small size defects (due, for example, to surface finishing), to neglect such defects or to consider them as real cracks would yield to non conservative predictions. Then, it is necessary in such cases to use models already mentioned [7,14] or, simply, to consider the fatigue strength properties of smooth specimens with the same surface finishing (or with defects of equivalent size).

Figure 7 clarifies the scale effect for blunt cracks, that is the reduction of fatigue strength as a consequence of variations of the absolute dimensions, while K_t is kept constant: on the left side there is a zone substantially not influenced by the absolute dimensions ($a < a_0$). In the middle ($a_0 < a < a^*$) there is, on the contrary, a zone where the size effect is fully included and the fatigue strength of components scaled in geometrical proportion falls according to their dimension ratio powered to 0.5 (at least in all geometries weakened by notches with parallel flanks). Finally, on the right side, the scale effect disappears again when $a > a^*$.

In the presence of V-shaped notches with an included angle different from zero, the diagram should be modified, since the exponent 0.5 in Eq. (1) is no longer valid. When, for example, the angle of the V-shaped notch is 135° (a value typical of welded joints), the exponent turns out to be 0.326 [11], and the penalization due to scale effect is reduced with respect to the crack case. Obviously, the two intersections between the inclined straight line and the horizontal line (Figure 7) will vary consequently.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 \tilde{r}^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} [(1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta + \chi_1(1-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 r_0^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left(\frac{\tilde{r}}{r_0}\right)^{\mu_1-1} [(3-\lambda_1)-\chi_1(1-\lambda_1)]\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 \tilde{r}^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} [(3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta - \chi_1(1-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta] \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 r_0^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left(\frac{\tilde{r}}{r_0}\right)^{\mu_1-1} [(3-\lambda_1)-\chi_1(1-\lambda_1)]\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 \tilde{r}^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} [(1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta + \chi_1(1-\lambda_1)\sin(1+\lambda_1)\theta] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_1 r_0^{\lambda_1-1}}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left(\frac{\tilde{r}}{r_0}\right)^{\mu_1-1} [(3-\lambda_1)-\chi_1(1-\lambda_1)]\sin(1+\mu_1)\theta \end{aligned} \quad (A.4)$$

In queste relazioni il fattore K_1 di intensificazione delle tensioni coincide numericamente con il fattore delle analoghe geometrie non raccordate quando ρ tende a zero. Nel casale condizione non sussista, il K_1 potrà essere correlato alla tensione $\sigma_{\theta\theta}$ di picco [6]. Nel caso di lastra semiinfinita con intaglio (o cricca di bordo) la profondità dell'intaglio viene indicata con a (coerentemente con la simbologia introdotta per intaglio centrale). Mantenendo le stesse coordinate polari già introdotte per i diversi casi, le espressioni delle tensioni restano le stesse anche se i loro valori risultano leggermente maggiori:

- nel caso di intaglio semicircolare le tensioni risultano moltiplicate circa per 1.02;
- nel caso di apertura nulla le tensioni risultano moltiplicate per 1.12;
- nel caso di intaglio di apertura non nulla le tensioni risultano moltiplicate per un coefficiente maggiore di 1.12, che aumenta all'aumentare dell'angolo di apertura.

Ipotizzando che a governare il comportamento a fatica sia lo stato tensionale agente lungo la linea di propagazione della cricca (e cioè sull'asse x di figura 3 con origine sull'apice dell'intaglio), ipotesi oggi normalmente accettata [7], lo stato tensionale per i diversi casi visti assume le seguenti espressioni:

foro circolare

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_g}{2} \left[2 + \left(\frac{a}{a+x}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{a+x}\right)^4 \right] \\ \sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{3\sigma_g}{2} \left[\left(\frac{a}{a+x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^4 \right] \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (A.5)$$

intaglio di apertura nulla con $\rho=0$ (cricca)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} = \sigma_g \left(\frac{a}{2x}\right)^{0.5} \\ \sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} = \sigma_g \left(\frac{a}{2x}\right)^{0.5} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (A.6)$$

intaglio di apertura qualunque con $\rho=0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_1 x^{\lambda_1-1} = K_{1y} x^{-\gamma} \\ \sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(3-\lambda_1)-\chi_1(1-\lambda_1)}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} K_1 x^{\lambda_1-1} = K_{1y} x^{-\gamma} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (A.7)$$

intaglio di apertura nulla con $\rho \neq 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \left(x + \frac{\rho}{2} \right) \left(1 + \frac{\rho}{2\left(x + \frac{\rho}{2}\right)} \right) \\ \sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \left(x + \frac{\rho}{2} \right) \left(1 - \frac{\rho}{2\left(x + \frac{\rho}{2}\right)} \right) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (A.8)$$

intaglio di apertura qualunque con $\rho \neq 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} (r_0+x)^{\lambda_1-1} + \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{[3-\lambda_1-\chi_1(1-\lambda_1)]}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left(\frac{r_0+x}{r_0}\right)^{\mu_1-1} \cdot r_0^{\lambda_1-1} \\ \sigma_{rr} = \sigma_{xx} &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(3-\lambda_1)-\chi_1(1-\lambda_1)}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} (r_0+x)^{\lambda_1-1} - \frac{K_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{[3-\lambda_1-\chi_1(1-\lambda_1)]}{(1+\lambda_1)+\chi_1(1-\lambda_1)} \left(\frac{r_0+x}{r_0}\right)^{\mu_1-1} \cdot r_0^{\lambda_1-1} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (A.9)$$

Tra le precedenti espressioni, quelle relative alla cricca, usuali nella Meccanica della Frattura Lineare Elastica e valide solo nelle immediate adiacenze dell'apice della cricca, assumono forma più complessa nel caso che si voglia rappresentare l'intero campo di tensione [12]. In questo caso l'espressione per la tensione nella direzione del carico diventa:

$$\sigma_{yy} = \sigma_g \left[1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^2 \right]^{-0.5} \quad (A.10)$$

A B S T R A C T

ANALYSIS OF SOME PROBLEMS RELATED TO THE NUMERICAL EVALUATION OF THE FATIGUE STRENGTH

Consider a series of tests in which the notch depth a is kept constant but the stress concentration factor is varied by modifying the notch root radius ρ . Experimental data take the form shown in Figure 1: initially the fatigue falls rapidly as K_t increases, but beyond the critical value K_t^* , the fatigue limit of the notched specimens remains constant despite increases in K_t . After Frost et al. [2], the zone included between the two curves, beyond K_t^* , is commonly thought of as the non-propagating crack zone. Dealing with the same subject, Smith and Miller [3] were able to demonstrate that all notches with K_t greater than K_t^* behave identically and can be treated like cracks of the same length.

LEFM-based predictions give a fatigue limit of cracked components equal to $\Delta\sigma_{th} = \Delta K_{th} / \sqrt{\pi a}$ (1)

with an upper limit represented by the fatigue limit $\Delta\sigma_0$ of the uncracked material (see Figure 6). The intersection of the curves gives El-Haddad's length parameter a_0 [14].

The continuous line shown in Figure 1 results in conservative predictions, so that some well-known expressions due to Peterson and Neuber, and suitable for mitigating the influence of K_t , could be neglected. Conversely, if one uses the continuous line shown in Figure 6, fatigue predictions would be non conservative and then unacceptable in fatigue design. Since the differences in the neighborhood of a_0 can be substantial, the real behavior requires a_0 to be added to a in Eq.(1), according to suggestions by El-Haddad et al. [14].

It is the authors' opinion that the extension of the diagram shown in Figure 6 to blunt cracks (i.e. central U-shaped notches) - including findings already illustrated in Figure 1 - allows a better understanding of the bridging existing between the classic concept of "notch sensitivity" and the concept of "sensitivity to defect" which are, at least from a